

אלגברה

תכנון לינארי

שאלות:

(1) חקלאי צריך לתכנן את עיבוד שדותיו לעונה החקלאית, כך שרווחיו יהיו מקסימליים. המשאבים העומדים לרשותו הם: שטח של 10 דונמים, 2,800 מ"ק מים ו-364 ימי עבודה. הוא החליט לנצל את כל משאביו לגידול עגבניות ופלפל. הצרכים והרווחים לדונם, לגידולים אלה, נתונים בטבלה שלפניך:

רווחים לדונם	ימי עבודה לדונם	מים לדונם	
800 שקל	14 יום	350 מ"ק	עגבניות
1400 שקל	42 יום	210 מ"ק	פלפל

- כתוב את מערכת האילוצים ואת פונקציית המטרה לבעיה.
- מצא על כמה דונמים צריך החקלאי לגדל עגבניות ועל כמה דונמים הוא צריך לגדל פלפל, כדי שרווחיו יהיו מקסימליים.
- מצא מה יהיו הרווחים המקסימליים של החקלאי.

(2) לרשות נגריה 3 מ"ק עצים, 21 מ"ר דיקט ו-104 ימי עבודת פועל. לייצור ארון מטבח דרושים 0.2 מ"ק עץ, 1 מ"ר דיקט ו-12 ימי עבודת פועל. לייצור ארון בגדים דרושים 0.4 מ"ק עץ, 3 מ"ר דיקט ו-5 ימי עבודת פועל. הרווח ממכירת ארון מטבח הוא 1,000 שקל וממכירת ארון בגדים 1,500 שקל. כמה ארונות וכמה ארונות בגדים כדאי לנגריה לייצר, כדי שרווחיה יהיו מקסימליים?

(3) מפעל מייצר שני סוגי שולחנות: שולחן אוכל ושולחן סלוני. תהליך הייצור מורכב משלושה שלבים עיקריים: חיתוך, עיבוד וצביעה. במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את ציוד החיתוך 16 שעות לכל היותר, את ציוד העיבוד אפשר להפעיל 18 שעות לכל היותר ואת ציוד הצביעה 12 שעות לכל היותר. אותנו ציוד משמש לייצור שני סוגי השולחנות. פירוט הזמן הדרוש לכל שלב בייצור שולחן אחד נתון בטבלה שלפניך:

צביעה	עיבוד	חיתוך	שולחן אוכל
1 שעה	1 שעה	2 שעות	שולחן אוכל
1 שעה	3 שעות	1 שעה	שולחן סלוני

רווח המפעל מכל שולחן אוכל הוא 200 שקל ומכל שולחן סלוני הוא 350 שקל.
א. כמה שולחנות מכל סוג על המפעל לייצר במחזור ייצור אחד, כדי שרווחיו יהיו מקסימליים?

ב. באחד ממחזורי הייצור התקלקלה מכונת הצביעה לשעה אחת ולכן היה אפשר להפעילה רק 11 שעות.
האם תשובתך לסעיף א' תשתנה לגבי מחזור ייצור זה? נמק.

4) במפעל פועלות שלוש מכונות: M_1 , M_2 , M_3 המשמשות להכנת שני סוגי מוצרים. כל אחד מהמוצרים חייב לעבור עיבוד בכל אחת משלוש המכונות. במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את המכונה M_1 14 שעות לכל היותר, את המכונה M_2 אפשר להפעיל 30 שעות לכל היותר ואת המכונה M_3 12.5 שעות לכל היותר. הזמן הדרוש לייצור 1 ק"ג מוצר מכל סוג בכל אחת מהמכונות והרווח הנקי ממכירתו של 1 ק"ג מוצר נתונים בטבלה שלפניך:

רווח נקי	M_3	M_2	M_1	
70 שקל	4 שעות	3 שעות	1 שעה	מוצר ראשון
100 שקל	10 שעות	1 שעה	1 שעה	מוצר שני

א. מצא את הכמות בק"ג שיש לייצר מכל סוג במחזור ייצור אחד, כדי לקבל רווח מקסימלי.

ב. איזה מכונה לא נוצלה עד תום במקרה שהתקבל הרווח המקסימלי? נמק.

5) וועד עובדים מעוניין להזמין במפעל מזון חבילות שי המכילות שקיות ציפס וחפיסות שוקולד. הוועד החליט כי כל חבילה תכיל לכל היותר 20 פריטים, משקלה יהיה לפחות 3,000 גרם ונפחה לפחות 4,800 סמ"ק. המשקל, הנפח והמחיר של הציפס ושל השוקולד רשומים בטבלה שלפניך:

מחיר	נפח	משקל	
2 שקלים	600 סמ"ק	100 גרם	שקית ציפס
3 שקלים	150 סמ"ק	300 גרם	חפיסת שוקולד

א. רשום את מערכת האילוצים ופונקציית המטרה, ושרטט את התחום האפשרי של הבעיה.

- ב. מצא כמה שקיות צ'יפס וכמה חפיסות שוקולד צריך הוועד להכניס לחבילה כך שמחירה יהיה מינימלי.
- ג. כעבור שנה, פנה הוועד למפעל המזון וביקש מהמפעל להרכיב את חבילות השי. כל הנתונים והאילוצים נשארו כמו שהיו בשנה הקודמת. כיצד צריך המפעל להרכיב את החבילה, כדי שמחירה יהיה מקסימלי?

6) אדם שעושה דיאטה צריך לבלוע כל יום לפחות 80 מיליליטר מחומר B , ולפחות 36 מיליליטר מחומר C . חומרים אלו נמצאים במיץ עגבניות ובמיץ ענבים, אבל במיצים אלה יש גם חומר D , העלול להזיק לדיאטה ואסור לבלוע ממנו יותר מ-60 מיליליטר ליום. בטבלה שלפניך נתונים במיליליטרים הכמויות של החומרים B , C ו- D בכוס מיץ עגבניות ובכוס מיץ ענבים.

D	C	B	
5	2	20	כוס מיץ עגבניות
5	6	4	כוס מיץ ענבים

- כוס מיץ עגבניות עולה 10 אגורות. כוס מיץ ענבים עולה 50 אגורות.
- א. הראה בשרטוט את התחום האפשרי של הבעיה.
- ב. כמה כוסות מיץ מכל סוג על האדם לשתות ביום, כך שהוצאתו הכספית ליום תהיה מינימלית?
- ג. הוסף לשרטוט את קו הגובה המתאים להוצאה כספית יומית של 340 אגורות וקבע על פיו כמה כוסות שלמות מכל סוג על האדם לשתות, אם בכוונתו להוציא 340 אגורות ליום.

7) מכון הרזיה ממליץ לאכול רק עוף וסלט ירקות. בטבלה שלפניך נתונים מספר הקלוריות, כמויות הוויטמינים והמחיר לכל מנת עוף ולכל מנת סלט. לפי תנאי הדיאטה של מכון ההרזיה, אדם חייב לצרוך ביום אחד לכל היותר 900 קלוריות, לפחות 13 מיליגרם ויטמין 1 ולפחות 33 מיליגרם ויטמין 2.

מספר קלוריות	מיליגרם ויטמין 1	מיליגרם ויטמין 2	מחיר מנה בשקלים
120	3	3	3
30	1	6	2

- א. שרטט את התחום האפשרי של הבעיה.
- ב. מצא כמה מנות עוף וכמה מנות סלט על האדם לאכול ביום אחד כדי לעמוד בתנאי הדיאטה במחיר מינימלי.

8) נתונים האילוצים :

$$y + 2 \geq 0$$

$$x - 7 \leq 0$$

$$x + y \leq 10$$

$$y \leq 2x + 4$$

א. שרטט את התחום האפשרי של הבעיה.

ב. מצא את הערך המינימלי שמקבלת פונקציית המטרה : $f(x, y) = 10x - 5y$

בתחום האפשרי.

ג. הראה כי פונקציית המטרה מקבלת ערך מינימלי בקטע (ולא בקודקוד בודד).

9) חיה מסוימת חייבת לאכול, לצורך דיאטה, במשך תקופה מסוימת שני סוגי

מזון בלבד, מזון מסוג א' ומזון מסוג ב'.

התכולה של יחידת מזון אחת מכל סוג נתונה בטבלה שלפניך :

מחיר יחידת מזון בשקלים	מיליגרם ויטמינים ליחידת מזון	גרם חלבונים ליחידת מזון	גרם פחמימות ליחידת מזון	
0.7	6	4	12	סוג א'
1.5	6	1	8	סוג ב'

לפי תנאי הדיאטה על החיה לאכול במשך יממה לפחות 12 גרם פחמימות,

6 גרם חלבונים ו-18 מיליגרם ויטמינים.

מצא כמה יחידות מזון מכל סוג על החיה לאכול ביממה כדי לקיים את תנאי

הדיאטה כך שההוצאה הכספית תהיה מינימלית.

10) נתונים האילוצים :

$$y \leq 2x + 3$$

$$x + 2y \leq 21$$

$$x + 7y \geq 21$$

$$y \leq 7$$

א. שרטט את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים.

ב. מצא את הערך המקסימלי שמקבלת פונקציית המטרה $f(x, y) = 16x - 8y$

בתחום זה.

ג. מצא שני פתרונות אפשריים, שעבורם מקבלת פונקציית המטרה את

הערך 8.

(11) נתונה מערכת האילוצים :

$$2y + 5x \geq 0$$

$$2y - x \leq 12$$

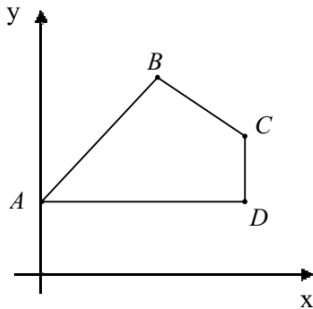
$$x + y \leq 10$$

$$y \geq 2\frac{1}{2}$$

פונקציית המטרה היא : $f(x, y) = 10x - 10y$.

- א. שרטט את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים.
 ב. באיזה נקודה בתחום מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי?
 ג. תן דוגמא לשתי נקודות השייכות לתחום האפשרי ושעבורן הערך של פונקציית המטרה הוא -20.

(12) פנים מרובע ABCD וקווי השפה שלו מתארים את התחום המתקבל ממערכת האילוצים :



$$y \leq x + 3$$

$$y \geq 3$$

$$y \leq -\frac{1}{2}x + 12$$

$$x \leq 10$$

- א. מצא את שיעורי הקודקודים A, B, C, D.
 ב. פונקציית המטרה, $f(x, y) = mx + 10y$, מקבלת בתחום ערך מקסימלי לאורך כל הקטע BC. חשב את m , ומצא את הערך המקסימלי של פונקציית המטרה.
 ג. מצא את הערך המינימלי שמקבלת פונקציית המטרה בתחום נתון.

(13) נתונים האילוצים :

$$y \geq 0, x \geq 0$$

$$y \leq 2x + 4$$

$$y \leq -2x + 8$$

$$y \geq 2x - 4$$

פונקציית המטרה היא : $f(x, y) = 3x - y + 6$.

- א. קווקו בשרטוט מדויק את התחום האפשרי של הבעיה.
 ב. הוסף לשרטוט את קו הגובה שבו ערך פונקציית המטרה הוא 5.
 ג. באיזו נקודה בתחום האפשרי מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי?

14 מצא ערך מינימלי של הפונקציה $f(x, y) = 2x - y$

$$x + y \leq 5$$

כאשר האילוצים הם: $y \geq 0$

$$y \geq 6 - 2x$$

15 לרשותו של איכר יש מקסימום 100 דונם קרקע.

עליו לחלקם לשני גידולים, כך שהכנסתו השנתית תהיה מקסימלית.

סה"כ ימי עבודה לשנה, שעומדים לרשות האיכר לגידול הגידולים, הם 420 ימים.

גידול א' דורש 2 ימי עבודה לדונם (לשנה) וגידול ב' דורש 7 ימי עבודה לדונם (לשנה).

ההכנסה הצפויה היא 10,000 שקל לדונם לגידול א' ו-30,000 שקל לדונם לגידול ב'.

כמה דונמים יש להקדיש לכל גידול, כדי שהכנסתו של האיכר תהיה מקסימלית?

16 בית חרושת מייצר שני סוגי סיבים.

עיבוד של טונה אחת של סיב א' דורש 8 שעות במכונת ניקוי ו-5 שעות במכונת עיבוד.

עיבוד של טונה אחת של סיב ב' דורש 6 שעות במכונת ניקוי ו-15 שעות במכונת עיבוד.

כל מכונה יכולה להיות מופעלת 45 שעות לכל היותר בשבוע עבודה.

הרווח של המפעל הוא 15 אלף שקל לכל טונה מסוג א' ו-20 אלף שקל לכל טונה מסוג ב'.

כמה טונות מכל סוג כדאי למפעל לייצר בשבוע?

17 למפעל נחושת יש שתי מכרות: מכרה 1 ומכרה 2.

בכל אחד מהמכרות אפשר להפיק שלושה סוגי עפרות:

מכרה 1 יכול להפיק ביום עבודה 6 טונות עפרה א', 2 טונות עפרה ב' ו-4 טונות עפרה ג'.

מכרה 2 יכול להפיק ביום עבודה 2 טונות עפרה א', 2 טונות עפרה ב' ו-12 טונות עפרה ג'.

המפעל התחייב לספק לפחות 120 טונות של עפרה א', לפחות 80 טונות של עפרה ב' ולפחות 240 טונות של עפרה ג'.

הוצאות הפעלת המכרות ליום עבודה אחד באלפי שקלים הן 120 למכרה 1 ו-160 למכרה 2.

למכרה 2.

כמה ימים יש להפעיל כל מכרה כדי לספק את הדרישה, כך שהוצאות ההפעלה יהיו מינימליות? חשב את ההוצאות המינימליות.

מינימליות? חשב את ההוצאות המינימליות.

18 מצא ערך מינימלי וערך מקסימלי של פונקציית המטרה $f(x, y) = x + 2y$.

תחת האילוצים: $x \leq 2$, $x \geq y$, $x + y \leq 3$, $y + 2 \geq 0$.

19) במפעל לייצור סלטים מייצרים שני סוגי סלטים : סלט מיונז וסלט חצילים.
תהליך הייצור מורכב משלושה שלבים עיקריים : קיצוץ, ערבוב ואריזה.
פירוט הזמן הדרוש לכל שלב בייצור ק"ג אחד של סלט נתון בטבלה שלפניך :

ק"ג סלט מיונז	קיצוץ	ערבוב	אריזה
1 דקה	5 דקות	3 דקות	
ק"ג סלט חצילים	2 דקות	4 דקות	1 דקה

במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את ציוד הקיצוץ 12 שעות לכל היותר, את ציוד הערבוב אפשר להפעיל 30 שעות לכל היותר ואת ציוד האריזה $14\frac{1}{2}$ שעות לכל היותר.
המכונות משמשות לייצור שני סוגי הסלטים.
הרווח הנקי של המפעל על סלט מיונז הוא 6 שקלים לק"ג ועל סלט חצילים 10 שקלים לק"ג.
כמה ק"ג מכל סוג של סלט כדאי למפעל לייצר במחזור אחד, כדי להגיע לרווח מקסימלי?

תשובות סופיות:

- (1) א. מערכת אילוצים: פונקציית מטרה: $f(x, y) = 800x + 1400y$
- $$x + y \leq 10$$
- $$14x + 42y \leq 364$$
- $$350x + 210y \leq 2800$$
- $$y \geq 0; x \geq 0$$
- ב. עגבניות: 2 דונם, פלפל: 8 דונם. ג. 12,800 שקל.
- (2) 7 ארונות מטבח, 4 ארונות בגדים.
- (3) א. 4 שולחנות סלוניים, 6 שולחנות אוכל.
ב. לא תשתנה. כיוון שהאילוץ של מכונת הצביעה, גם הוא משתנה ל- $x + y \leq 1$, עדיין נמצא מחוץ לתחום.
- (4) א. 2.5 ק"ג מהמוצר הראשון, 11.5 ק"ג מהמוצר השני.
ב. M_2 לא נוצלה עד תום, כיוון שבמקרה של רווח מקסימלי עבדה רק 19 שעות.
- (5) א. מערכת אילוצים: פונקציית מטרה: $f(x, y) = 2x + 3y$
- $$x + y \leq 20$$
- $$600x + 150y \geq 4800$$
- $$100x + 300y \geq 3000$$
- $$y \geq 0; x \geq 0$$
- ב. 6 שקיות ציפס, 8 חבילות שוקולד.
ג. 4 שקיות ציפס, 16 חבילות שוקולד.
- (6) ב. 9 כוסות מיץ עגבניות, 3 כוסות מיץ ענבים.
ג. 4 כוסות מיץ עגבניות, 6 כוסות מיץ ענבים.
- (7) ב. 3 מנות עוף, 4 מנות סלט ירקות.
- (8) ב. מינימום: $f(x, y) = -20$. ג. מינימום בקטע AB שבציר.
- (9) 2 יחידות מסוג א' ויחידה אחת מסוג ב'.
- (10) ב. מקסימום: $f(7, 2) = 96$.
- ג. נקודות בתחום על הקו $y = 2x - 1$ לדוגמא: $(2, 3)$; $(3, 5)$; $(4, 7)$.
- (11) ב. מקסימום בנקודה $(7.5, 2.5)$. ג. לדוגמא: $(2, 4)$; $(1, 3)$; $(3, 5)$.
- (12) א. $A(0, 3)$, $B(6, 9)$, $C(10, 7)$, $D(10, 3)$.
- ב. $m = 5$, מקסימום: $f(x, y) = 120$. ג. מינימום: $f(x, y) = 30$.
- (13) ג. $(3, 2)$.
- (14) מינימום: $f(1, 4) = -2$.

15) 56 דונם לגידול א', 44 דונם לגידול ב'.

16) 4.5 טון מסיב א', 1.5 טון מסיב ב'.

17) 30 ימים- מכרה 1, 10 ימים- מכרה 2, 5200 אלפי שקלים.

18) מינימום: $f(-2, -2) = -6$, מקסימום: $f(1.5, 1.5) = 4.5$.

19) 2 ק"ג סלט מיונז, 5 ק"ג סלט חצילים.